Université Saint-Joseph
Faculté des sciences

Année univ. 2004-2005
Matière : NUMCL5

Feuille de T.D.4

Ex-1 : Pour tout réel α, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

1. Ecrire la matrice J de la méthode itérative de Jacobi pour la matrice A. Calculer $\rho(J)$. Pour quelle valeur de α cette méthode converge-t-elle ?
2. Ecrire la matrice L_1 de la méthode itérative de Gauss-Seidel pour la matrice A. Calculer $\rho(L_1)$; on distinguera les cas $\alpha \in [0,4]$ et $\alpha \notin [0,4]$ et on etudiera le cas où $\alpha \in [0,4]$.

Ex-2 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible triangulaire inférieure : $A = D - E - F$ avec $F = 0$. On considère la méthode de Jacobi définie par : $Dx_{k+1} = Ex_k + b$.

1. Montrer que le rayon spectral de $J = D^{-1}E$ est nul.
2. Montrer que J est nilpotente, C.A.D. qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $J^p = 0$. ~~(On pourra calculer $J^p(e_i)$ et demontrer que c'est nul).~~
3. Soit x l'unique vecteur colonne vérifiant $Ax = b$. Montrer que $x_{k+1} - x = J(x_k - x)$.
4. En déduire qu'il s'agit d'une méthode directe, c'est à dire que x est obtenu en un nombre fini d'itérations.
5. Calculer tous les termes de la suite (x_k) dans l'exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad et \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ex-3 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible : on cherche à approcher la solution $\tilde{x}$ du système $Ax = b$. On suppose que A se décompose en $A = I - B$ avec $||B|| < 1$ pour une certaine norme subordonnée. On définit la suite (x_k) par $x_{k+1} = Bx_k + b$, $k \geq 0$, x_0 étant une donné. On note $e_k = x_k - \tilde{x}$ l'erreur à l'itération k, et $r_k = Ax_k - b$ le résidu à l'itération k.